Электростатическое поле в вакууме

Кулоном экспериментально установлено, что на точечный заряд q_1 в вакууме со стороны другого точеченого заряда q_2 действует сила:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r \tag{1}$$

Вектор $\vec{e}_r$ всегда направлен в сторону того заряда, на который действует сила $\vec{F}$ (в данном случае от q_2 к q_1). Таким образом, если заряды имеют одинаковый знак, действие этой силы способствует их отталкиванию, и наоборот, если знаки разные, заряды притягиваются. Введя радиус-вектор $\vec{r}$, по модулю равный расстоянию между зарядами и направленный как $\vec{e}_r$, формулу можно переписать:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r} \tag{2}$$

Поскольку сила электростатического взаимодействия зависит только от зарядов и расстояния между ними, действует принцип суперпозиции:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + ... + \vec{F}_{1n} = \sum_{i=2}^{n}\vec{F}_{1i} \tag{3}$$

Если зафиксировать заряд q и рассматривать силу, с которой он действует на произвольный заряд q_1, очевидно, что отношение этой силы к величине q_1 зависит только от q и расстояния между зарядами. Можно ввести вспомогательную величину, показываюшую, какая сила действует со стороны зафиксированного заряда на единичный:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r \tag{4}$$

Любая группа неподвижных зарядов создает поле сил, называемое электростатическим. Величина $\vec{E}$ называется напряженностью такого поля. Таким образом, сила, действующая на заряд q_1 в поле с напряженностью $\vec{E}$ равна:

$$\vec{F} = q_1\vec{E} \tag{5}$$

Чтобы соблюдался закон Кулона, вектор $\vec{E}$ должен быть направлен от положительных зарядов к отрицательным.

Поскольку принципу суперпозиции подчиняется сила электростатического взаимодействия, этому же принципу подчиняется напряженность:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + ... + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i \tag{6}$$

Чтобы сделать электростатическое поле наглядным, вводят линии напряженности – ориентированные кривые, касательная к которым в любой точке совпадает по направлению с $\vec{E}$, и густота которых выбрана так, чтобы на единицу перпендикулярной линиям поверхности приходилось такое их количество, которое совпадало бы со значением E. Ясно, что изобразить все линии поля на бумаге невозможно, однако они помогают определить направление $\vec{E}$ и то, как этот вектор изменяется в пространстве.

От векторного поля $\vec{E}$ можно перейти к скалярному. Требуется найти скалярную величину, определенную в каждой точке поля, показывающую, куда направлен вектор $\vec{E}$, и чему равен его модуль. Для этого распишем по определению работу A перемещения заряда q', находящегося в поле заряда q из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{l} = \int_1^2 F\vec{e}_r d\vec{l} \tag{7}$$

Скалярное произведение $(\vec{e}_r; d\vec{l})$ дает приращение модуля радиус-вектора dr. Таким образом, криволинейный интеграл сводится к определенному:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{qq'}{r_1} - \frac{qq'}{r_2}) \tag{8}$$

Поскольку сила электростатического взаимодействия центральна, ее поле консервативно. Следовательно, работа сил поля представима как убыль потенциальной энергии заряда:

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} \tag{9}$$

Отсюда:

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r} + const \tag{10}$$

Константа $const$ выбирается таким образом, чтобы потенциальная энергия q' на бесконечном удалении от заряда, создающего поле, была равной нулю. Ясно, что $const = 0$.

Поле создано зарядом q, заряд q' может быть произвольным. Отношение $\frac{W_p}{q'}$ зависит только от поля. Мы нашли некую скалярную величину, характеризующую поле в каждой его точке:

$$\varphi = \frac{W_p}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \tag{11}$$

Эта величина называется потенциалом электростатического поля.

Аддитивность потенциальной энергии и принцип суперпозиции $\vec{E}$ дают аддитивность потенциала:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i} \tag{12}$$

Таким образом, потенциальная энергия заряда равна:

$$W_p = q'\varphi \tag{13}$$

Похоже на случай с напряженностью.

Из консервативности сил поля $\vec{E}$, во-первых, следует, что работа этих сил по замкнутому контуру равна нулю ($r_1 = r_2$). Во-вторых, соблюдаются следующие соотношения:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{14}$$

Это можно переписать с помощью дифференциального оператора набла:

$$\vec{E} = -(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z) = -\vec{\nabla}\varphi \tag{15}$$

Получили связь напряженности и потенциала, нашли скалярную величину, характеризующую изменение напряженности поля в пространстве.

Для наглядности важно понимать, что напряженность в любой точке направлена в сторону убыли потенциала.

С помощью соотношения $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ можно найти напряженность, зная потенциал. Обратная операция тоже осуществима и описана нами выше:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} \tag{16}$$